EXERCÍCIO: BRECHA ALEATÓRIA

Considere uma manobra que tem de ser feita nas brechas entre passagens de veículos do fluxo principal e requer uma brecha mínima de 6 segundos para que o motorista possa executá-la.

Uma contagem de tráfego obteve 600 veículos em 40 minutos para o fluxo principal.

Deseja-se saber:

(a) qual o intervalo médio entre veículos no fluxo principal e qual a sua relação com as características da distribuição entre chegadas dos veículos ?

(b) qual a probabilidade de que o veículo do fluxo secundário aceite uma brecha? (admitindo uma distribuição de Poisson simples)

(c) quais seriam os resultados se $\tau = 2$ seg é uma separação mínima entre veículos do fluxo principal?

(d) e se também observou-se que 50% dos veículos estão em pelotão?

Considere que, após a passagem do primeiro veículo, os demais passam com intervalos de 3 segundos (quando a brecha for suficiente).

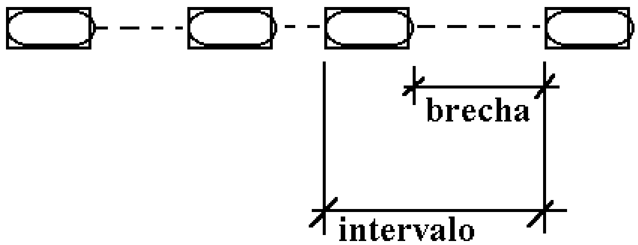
(e) qual a probabilidade de passarem somente dois veículos (admitindo uma distribuição de Poisson simples) ?

(f) qual a capacidade máxima para a via secundária (aproveitamento total das oportunidades de cruzamento), admitindo uma distribuição de Poisson simples ?

(g) como generalizar a fórmula de capacidade para distribuições mais gerais que consideram a existência de separação mínima entre veículos e de uma proporção de veículos trafegando em pelotões ?

(h) qual a duração média de uma brecha adequada para os veículos da via secundária e como a fórmula de capacidade poderia ser relacionada com esta duração média e com a operação na via secundária ?

SOLUÇÃO DO EXERCÍCIO:



(a) O fluxo médio é $q = \frac{600}{40\!/\!_{60}} = 900\ {}^{v}\!/\!_{h} = 0{,}25\ {}^{v}\!/\!_{s}$ e, como o fluxo é sempre o inverso do intervalo médio, tem-se que o intervalo médio é

$$\mu_h \text{ ou } \bar{h} \text{ é } = \frac{1}{q} = 4 \text{ seg},$$

independente do tipo de distribuição.

(b) O modelo de Poisson simples despreza a separação mínima entre veículos e seu parâmetro pode ser estimado por λ = q = 0,25 v/s.

O intervalo médio é de 4 seg (< 6 seg), mas mesmo assim a manobra é possível, porque ocorrem intervalos com diferentes valores distribuídos.

Se os intervalos têm distribuição de Poisson simples, a probabilidade de $H \le 6$ seg é $1 - e^{-\lambda h}$. A probabilidade de aceitar uma brecha P, é igual a $P(H \ge 6 \text{ seg})$, e portanto:

$$P = 1 - P[H \le 6] = e^{-0{,}25 \cdot 6} = 0{,}223 \quad (22{,}38\%);$$

isto é, 22,38% dos intervalos podem ser aceitos (ver figura a).

(c) Se o fluxo ocorre em apenas uma faixa é importante considerar que há uma separação mínima entre veículos (tempo de passagem) e corrigir a hipótese de distribuição para os intervalos. Normalmente, a distinção entre brecha e intervalo é ignorada mas a seguir o valor de brecha exclui o tempo de passagem do veículo.

Dados $\tau = 2$ seg e $\mu_h = 4$ seg e assumindo ausência de pelotões $(\theta_L = 100\%)$ tem-se então:

$$\frac{1}{\lambda} = \mu_h - \tau = 2 \text{ seg} \Rightarrow \lambda = 0{,}5\ {}^{v}\!/\!_{s}.$$

Neste caso, uma brecha de 6 seg. corresponde a um intervalo de 8 seg $\Rightarrow$(h-τ)=6 seg.;

$$\therefore P = 1 - P[H \le 8] = 1{,}0 \cdot e^{-0{,}5.(8-2)} = 0{,}049 \quad (4{,}9\%)$$

isto é, 4,9% dos intervalos podem ser aceitos (gráfico b).

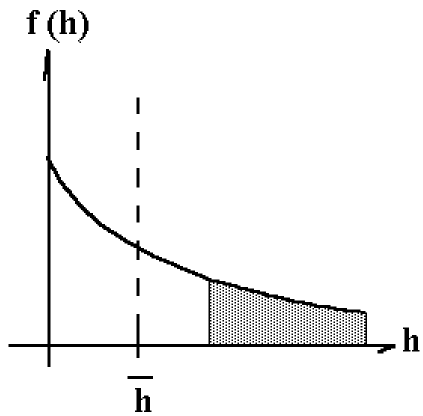
No entanto, com $q = 900\ {}^{v}\!/\!_{h}$ e apenas 1 faixa, será difícil não haver formação de pelotões ($\Rightarrow$resultado improvável).

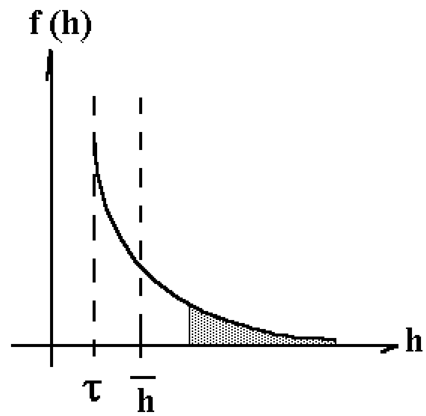
(d) Com 50% dos veículos em pelotões, $\theta_L = 0{,}50$ e têm-se então:

$$\frac{0{,}5}{\lambda} = \mu_h - \tau = 2 \text{ seg} \Rightarrow \lambda = 0{,}25 \ {}^{v}\!/_{seg}$$

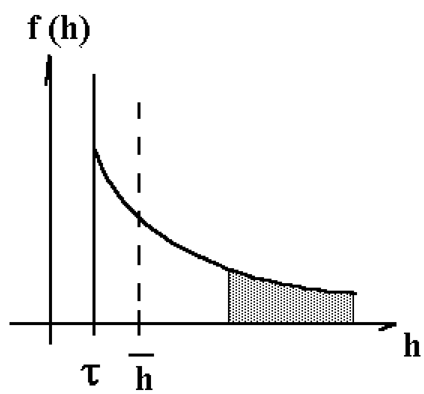
$$\therefore P = 1 - P[H \leq 8] = 0{,}5 \cdot e^{-0{,}25 \cdot (8-2)} = 0{,}1128 \text{,}$$

isto é, 11,28% dos intervalos podem ser aceitos (gráfico <u>c</u>)





a) Modelo de Poisson simples b) Cowan c/ separação mínima



c) Cowan (separação mínima e pelotões)

(e) Passam somente dois veículos se a brecha for maior que 9 segundos (6 para o primeiro e 3 para o segundo) mas menor que 12 segundos (caso em que passaria um terceiro veículo), sendo a probabilidade de intervalo H entre h_1 e h_2:

$$\therefore P[h_1 \leq H \leq h_2] = e^{-\lambda h_1} - e^{-\lambda h_2} \text{.}$$

Portanto, utilizando-se a distribuição de Poisson com λ=0,25 v/s, tem-se:

$$P[9 \leq H \leq 12] = e^{-0{,}25.9} - e^{-0{,}25.14} = 0{,}1054 - 0{,}0498 = 5{,}56\% \text{.}$$

(f) A capacidade em um período T com $\sim(qT)$ chegadas $\cong(qT)$ brechas, sendo $\lambda = q$ (distribuição de Poisson simples), é obtida de considerando o número de veículos máximo escoado em cada intervalo h (o primeiro toma α e os demais tomam β de h):

Brecha	**nº de veículos/intervalo**	**média no período**
$0 \le H < \alpha$	0	0
$\alpha \le H < \alpha+\beta$	1	$1 \cdot \lambda T \cdot [e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda(\alpha+\beta)}]$
$\alpha+\beta \le H < \alpha+2.\beta$	2	$2 \cdot \lambda T \cdot [e^{-\lambda(\alpha+\beta)} - e^{-\lambda(\alpha+2.\beta)}]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
aproveitamento total	-	$N_{max} = \sum N(H)$

Portanto, tem-se:

$$C_2 = \frac{N_{max}}{T} = \lambda[e^{-\lambda.\alpha} - e^{-\lambda.(\alpha+\beta)} + 2.e^{-\lambda.(\alpha+\beta)} - 2.e^{-\lambda.(\alpha+\beta)} + \ldots] =$$
$$= \lambda[e^{-\lambda.\alpha} + e^{-\lambda.(\alpha+\beta)} + e^{-\lambda.(\alpha+2\beta)} + \ldots] =$$
$$= \lambda \cdot e^{-\lambda.\alpha}[1 + e^{-\lambda.\beta} + e^{-\lambda.2.\beta} + \ldots] =$$
$$= \lambda \cdot e^{-\lambda.\alpha} \cdot \frac{1}{1-e^{-\lambda.\beta}} = \frac{e^{-\lambda.\alpha}}{1-e^{-\lambda.\beta}} \cdot q$$, (onde q é o fluxo principal).

(g) Para utilizar o resultado precedente para um caso mais geral, deve-se notar que a operação pode ser dividida em dois tipos de período, que corresponde ao escoamento em pelotões e ao escoamento com brechas, e que existe um período mínimo em que cada veículo da via principal ocupa a via, mesmo quando há brechas.

No escoamento de pelotões, que corresponde a $\theta_P.q.T$ veículos, não há brechas (o intervalo é τ) e todo o tempo de escoamento $T_{oP} = \tau.\theta_P.q.T$ tem a via ocupada, onde θ_P é a fração de pelotões na corrente de tráfego e τ é o intervalo mínimo entre veículos.

No escoamento sem pelotões, tem-se $(1-\theta_P).q.T$ veículos e um tempo ocupado de $T_{oL} = \tau.(1-\theta_P).q.T$. O tempo ocupado total é de $T_o = \tau.q.T$ e o tempo total com brechas em excesso ao tempo de passagem dos veículos é $T_L = T - \tau.q.T = (1-\tau.q).T$.

Portanto, o valor médio da brecha, para os veículos que passam no escoamento sem pelotões, é

$$\bar{b} = \frac{(1-\tau.q).T}{(1-\theta_P).q.T}$$, que corresponde a um fluxo aparente de $\tilde{q} = \frac{1}{\bar{b}} = \frac{1-\theta_P}{1-\tau.q}.q$

(que corresponde à parcela poissoniana da distribuição de Cowan).

A capacidade, neste caso mais geral, seria dada por:

$$C_2 = \frac{N_{max}}{T} = \frac{C_o.T_o + C_L.T_L}{T} = \frac{T_L}{T}.C_L$$ (dado que $C_o = 0$)

$$\therefore C_2 = \frac{(1-\tau.q).T}{T}.\frac{e^{-\tilde{q}.(\alpha-\tau)}}{1-e^{-\tilde{q}.\beta}}.\tilde{q} = \frac{(1-\tau.q).e^{-\tilde{q}.(\alpha-\tau)}}{1-e^{-\tilde{q}.\beta}}.\frac{(1-\theta_P)}{(1-\tau.q)}.q = \frac{(1-\theta_P).e^{-\tilde{q}.(\alpha-\tau)}}{1-e^{-\tilde{q}.\beta}}.q$$

(que é a fórmula usual de capacidade obtida com a distribuição de Cowan).

Esta análise mostra que fórmulas mais gerais para situações em que a operação experimenta condições de operação distintas podem ser obtidas analisando cada período específico e ponderando pela duração respectiva.

(h) As brechas aceitas pelos veículos na via secundárias satisfazem $H > \alpha$, tendo-se

$$\bar{h}_{>\alpha} = E[H/H>\alpha] = \int_\alpha^\infty h.f[H=h/H>\alpha].dh = \int_\alpha^\infty h.\frac{f[H=h]}{Pr[H>\alpha]}.dh\ .$$

Admitindo a distribuição mais geral de Cowan, $f[H=h/H>\alpha] = \frac{\theta_L.\gamma.e^{-\gamma.(h-\tau)}}{\theta_L.e^{-\gamma.(\alpha-\tau)}} = \gamma.e^{-\gamma.(h-\alpha)}$,

que é uma distribuição exponencial deslocada de α, com $\gamma = \tilde{q} = \frac{1-\theta_p}{1-\tau.q}.q$, cuja média é $\bar{h}_{>\alpha} = \alpha + \frac{1}{\gamma}$ (que também pode ser obtida pela integração direta, por partes).

Note que a expressão brecha adequada corresponde ao julgamento momentâneo dos veículos na via secundária apenas. Se a brecha utilizada pelo veículo da via secundária é suficiente para uma manobra sem interferência sobre os veículos da via principal, esta manobra é considerada perfeita (no sentido de não afetar o fluxo principal). O caso contrário, de manobra imperfeita, pode ocorrer mesmo sem ser adequada do ponto de vista de segurança.

Portanto, uma brecha considerada adequada pelos veículos da via secundária poderá ser utilizada mas trazer interferências para os veículos do fluxo principal.

Note também que a percepção das brechas no fluxo principal pelos usuários da via secundária não corresponde à distribuição real por dois motivos: porque chegam mais veículos em intervalos maiores e porque os usuários vêem intervalos apenas a partir de seu instante de chegada (e até seu instante de saída) na fila na via secundária.

A probabilidade de chegar em um intervalo com duração h é dada por $Pr[t \in H = h] = \kappa.h.Pr[H=h] = \kappa.h.f[h]$, onde κ é um fator de normalização que deve garantir uma distribuição de probabilidade regular, e $Pr[t \in G = g] = \int_g^\infty Pr[t \in H = s].Pr[t \in G = g/H = s].ds = \int_g^\infty \kappa.s.f[s].\frac{1}{s}.ds = \kappa.(1-F[g])$, sem considerar o instante de saída da fila. As distribuições acumuladas correspondentes podem ser obtidas de $Pr[t \in H \le h] = \int_0^h \kappa.s.f[s].ds$ e $Pr[t \in G \le g] = \int_0^g \kappa.(1-F[s]).ds$

A estimativa de paradas e atrasos parados na via secundária, por exemplo, tem de usar estas distribuições derivadas.

Uma análise aproximada pode ser feita com o uso da analogia semafórica. O intervalo médio $\bar{h}_{>\alpha}$ permite calcular o tempo disponível médio após cada interrupção (bloqueio) causada pelos veículos no fluxo principal como $\bar{t}_d = \bar{h}_{>\alpha} - \tau$.

O tempo disponível efetivo por intervalo deve descontar os tempos mortos no início e no final do movimento.

Como a eficiência máxima do escoamento da fila é representada pelo intervalo de seguimento β (o fluxo de saturação seria $S = 1/\beta$, portanto), o tempo morto inicial é $(\alpha - \beta)$ para o primeiro veículo.

No final da brecha existe o resíduo do intervalo não utilizado. Como seu valor está entre 0 e β, o tempo morto final pode ser estimado por $\beta/2$.

O tempo morto total é, então, $\ell = \left(\alpha - \beta/2\right)$ e o tempo disponível efetivo por intervalo é $\bar{t}_{def} = \bar{t}_d - \ell = \frac{1-\tau.q}{\theta_L.q} - \tau + \frac{\beta}{2}$, considerando α e β (ou ℓ) constantes.

Em um período T, existirão aproximadamente $q.T$ intervalos e $q.T.\theta_L.e^{-\gamma.(\alpha-\tau)}$ serão maiores que α (a brecha crítica). O número de bloqueios será, naturalmente, igual ao número de tempos disponíveis $q.T.\theta_L.e^{-\gamma.(\alpha-\tau)}$ e podem ser constituídos pelo tempo de passagem do veículo τ mais um número qualquer de intervalos menores que α (eventualmente nenhum, um ou mais de um).

A duração total dos bloqueios é T menos a duração total dos tempos disponíveis que é $q.T.\theta_L.e^{-\gamma.(\alpha-\tau)}.\left(\alpha + \frac{1-\tau.q}{q.\theta_L} - \tau\right)$. A duração média de um bloqueio pode, portanto, ser calculada por

$$\bar{t}_b = \frac{T - q.T.\theta_L.e^{-\gamma.(\alpha-\tau)}.\left(\alpha + \frac{1-\tau.q}{q.\theta_L} - \tau\right)}{q.T.\theta_L.e^{-\gamma.(\alpha-\tau)}} = \frac{e^{\gamma.(\alpha-\tau)}}{q.\theta_L} - \alpha - \frac{(1-\tau.q)}{q.\theta_L} + \tau$$

e o tempo bloqueado efetivo médio é $\bar{t}_{bef} = \bar{t}_b + \ell = \frac{e^{\gamma.(\alpha-\tau)} - (1-\tau.q)}{q.\theta_L} + \tau - \frac{\beta}{2}$.

Estas expressões permitem deduzir a fórmula alternativa aproximada para calcular a capacidade do movimento secundário com base na expressão $C_d = \varphi.S$, onde $\varphi = \frac{\bar{t}_d - \ell}{\bar{t}_d + \bar{t}_b}$ e $S = \frac{1}{\beta}$. Pode-se também estimar o atraso regular por $d_r = \frac{1-\varphi}{1-y}.\frac{\bar{t}_b}{2}$, $y = \frac{Q}{S}$ (onde Q é a demanda na manobra secundária, limitada a $q = Q \leq C$).